Asimptotske linije

Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi.

Asimptotske linije površi $\vec{r}$ dobijemo kada rješenja diferencijalne jednačine $F_2=0$ uvrstimo u jednačinu površi $\vec{r}$ (F_2 je druga osnovna forma površi).

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Odrediti asimptotske linije površi

$$z = xy^2$$

Rj.

Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi.

Pravci za koje je $F_2 = 0$ ($F_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$; F_2 je druga osnovna forma površi) zovu se asimptotski pravci u određenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ.

Ako zadanu površ napišemo u parametarskom obliku, u kojoj su promjenjive u i v imamo

$$\vec{r} = (u, v, uv^2).$$

Druga osnovna forma površi se računa po formuli

$$F_2 = d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_0$$

gdje je $d^2\vec{r}$ totalni diferencijal drugog reda, dok je $\vec{n} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ vektor normale na površ, $\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

Izračunajmo $d^2\vec{r}$.

$$\vec{r}\,'_u = (1, 0, v^2), \qquad \vec{r}\,''_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}\,'_v = (0, 1, 2uv), \qquad \vec{r}\,''_{vv} = (0, 0, 2u)$$

$$\vec{r}\,''_{uv} = (0, 0, 2v)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & v^2 \\ 0 & 1 & 2uv \end{vmatrix} = (-v^2, -2uv, 1), \qquad |\vec{n}| = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}.$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}\,''_{uu}\,du^2 + 2\vec{r}\,''_{uv}\,du\,dv + \vec{r}\,''_{vv}\,dv^2$$

$$= (0,\ 0,\ 4v\,du\,dv + 2u\,dv^2)$$

$$\vec{r}\,''_{uu}\,du^2 = (0,\ 0,\ 0)$$
$$2\vec{r}\,''_{uv}\,du\,dv = (0,\ 0,\ 4u\,du\,dv)$$
$$\vec{r}\,''_{vv}\,dv^2 = (0,\ 0,\ 2u\,dv^2)$$

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\,d^2\vec{r}\cdot\vec{n} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{v^4+4u^2v^2+1}}\,(0,0,4v\,du\,dv+2u\,dv^2)\,(-v^2,-2uv,1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{v^4+4u^2v^2+1}}\,(4v\,du\,dv+2u\,dv^2)$$

Diferencijalna jednačina asimptotskih linija je $F_2=0$ tj.

$$\frac{1}{|\vec{n}|}\,(4v\,du\,dv+2u\,dv^2)=0$$

$$4v\,du\,dv+2u\,dv^2=0$$

$$(4v\,du+2u\,dv)\,dv=0$$

$dv=0$ ili $4v\,du+2u\,dv=0 \quad /:2$

$v=C_1$

$$u\,dv=-2v\,du \qquad 2v\,du+u\,dv=0$$

$$\frac{du}{u} = -2\,\frac{dv}{v} \quad \Big/\int$$

$$\ln|u| = -2\ln|v| + C$$

$$\ln u + \ln v^2 = C \qquad u^2 = \frac{C}{V}$$

$$\vec{r} = (u, v, uv^2)$$

$$\ln uv^2 = C$$

$$uv^2 = C_2$$

Asimptotske linije površi su

$$\vec{r}_1 = (u,\ C_1,\ uC_1^2)$$
$$\vec{r}_2 = \left(u,\ \sqrt{\frac{C_2}{u}},\ C_2\right)$$

$$\left(u,\ \frac{C}{u^2},\ \frac{C^2}{u^3}\right)$$

$$(u,\ C_2,\ C_2^2u)$$

(#) Odrediti asimptotske linije površi

$$\vec{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ \frac{1}{u}).$$

Rj.

Asimptotske linije površi $\vec{r}$ dobijemo kada rješenja diferencijalne jednačine $F_2 = 0$ uvrstimo u jednačinu površi $\vec{r}$ (F_2 je druga osnovna forma površi).

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu}\,du^2 + 2\vec{r}''_{uv}\,du\,dv + \vec{r}''_{vv}\,dv^2$$

$$\vec{r}'_u = (\cos v,\ \sin v,\ -\frac{1}{u^2}) \qquad \vec{r}''_{uu} = (0, 0, \frac{2}{u^3})$$

$$\vec{r}'_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0) \qquad \vec{r}''_{uv} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0).$$

$$\vec{r}''_{vv} = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0)$$

$$d^2\vec{r} = (-2\sin v\,du\,dv - u\cos v\,dv^2,\ 2\cos v\,du\,dv - u\sin v\,dv^2,\ \frac{2}{u^3}du^2)$$

$$\vec{n} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & -\frac{1}{u^2} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (\frac{1}{u}\cos v,\ \frac{1}{u}\sin v,\ u)$$

Jednačinu asimptotskih linija možemo pisati u obliku

$$F_2 = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n} = 0$$

što za ovu površ postaje

$$\underline{-\frac{2}{u}\sin v\cos v\,du\,dv}\ \underline{-\cos^2 v\,dv^2}\ \underline{+\frac{2}{u}\sin v\cos v\,du\,dv}\ \underline{-\sin^2 v\,dv^2}$$
$$+\frac{2}{u^2}du^2 = 0$$

$$-dv^2 + \frac{2}{u^2}du^2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{u^2}du^2 = dv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2}\,\frac{du}{u} = \pm\, dv \quad \Big/ \int$$

$$\sqrt{2}\,\ln|u| = c \pm v$$

$$\ln u = \frac{c \pm v}{\sqrt{2}}$$

$$u_{1,2} = e^{\frac{c \pm v}{\sqrt{2}}}$$

Asimptotske linije su

$$\vec{r}_1 = \left(e^{\frac{c+v}{\sqrt{2}}}\cos v,\ e^{\frac{c+v}{\sqrt{2}}}\sin v,\ e^{\frac{-v-c}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\vec{r}_2 = \left(e^{\frac{c-v}{\sqrt{2}}}\cos v,\ e^{\frac{c-v}{\sqrt{2}}}\sin v,\ e^{\frac{-c+v}{\sqrt{2}}}\right).$$

pravcu. Tada je

$$K = \frac{1}{R} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} .$$

Podelivši i brojitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 *dobijamo* K *kao funkciju od* u,v *i* $\frac{du}{dv}$:

$$K = f(u,v,\frac{du}{dv}) .$$

Pravci za koje K *ima maksimalnu i minimalnu vrednost u fiksiranoj tački* (u,v) *zovu se glavni pravci u toj tački. Mogu se dobiti kao rešenja jednačine*

$$K_x' = 0 \qquad \text{gde je} \qquad x = \frac{du}{dv} .$$

Glavnim pravcima odgovaraju glavne krivine, i one mogu biti odredjene i kao koreni jednačine

$$\text{(a)} \quad (EG-F^2)K^2 - (EN-2FM+GL)K + (LN-M^2) = 0 .$$

Ako su K_1 *i* K_2 *glavne krivine, tada su* $R_1 = \frac{1}{K_1}$ i $R_2 = \frac{1}{K_2}$ *glavni poluprečnici.* $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ *zove se srednja krivina, a* $K_1 K_2$ *se zove Gaussova krivina površi. Iz jednačine (a) imamo*

$$K_1 K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} , \quad K_1 + K_2 = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} .$$

Gaussova krivina površi se može izračunati i preko formule

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Ako su x_1 *i* x_2 *rešenja jednačine* $K_x' = 0$, *to je*

$$x_1 = \left(\frac{du}{dv}\right)_1 = f_1(u,v)$$

$$x_2 = \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = f_2(u,v) .$$

Integralne krive gornjih diferencijalnih jednačina su linije krive. Ako je u nekoj tački $K_x' \equiv 0$, *tada je svaki pravac glavni* *pravac, tj. normalna krivina je ista za svaki pravac u toj tački, i ta tačka se zove pupčasta tačka površi.*

Kako je

$$K = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}\ , \quad x = \frac{du}{dv}\ ,$$

to je $K'_x = 0$ *za ono* x *koje je rešenje jednačine*

$$(FL-ME)x^2 + (GL-NE)x + (GM-FN) = 0\ ,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Posle množenja prve vrste sa dv^2 *dobijamo*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu linije krivine.

Koristeći Rodrigovu formulu koja kaže da je za glavne pravce, tj. za pravce u kojima je glavna krivina ekstramalna, imamo još i sledeće diferencijalne jednačine linije krive:

$$d\vec{n}_o = \lambda\, d\vec{r}$$

što povlači da je

$$d\vec{r} \cdot [\vec{n} \times d\vec{n}] = 0$$

Kako u prvoj aproksimaciji $\frac{1}{2} F_2$ *predstavlja rastojanje* d *tačke* $\vec{r}(u+du,\ v+dv)$ *od tangentne ravni površi povučene u tački* $\vec{r}(u,v)$*, to će biti istog znaka za svako* x*, tj. za svaki pravac* $\frac{du}{dv}$ *ako je diskriminanta kvadratnog trinoma*

(b) $\qquad Lx^2 + 2Mx + N$

negativna, tj. ako je $M^2 - LN < 0$ *i takva tačka površi se zove eliptična tačka. U okolini te tačke površ je sa iste strane tangentne ravni.*

Ako je diskriminanta od (b) pozitivna, tj. $M^2 - LN > 0$ *, tada će postojati pravci* $\frac{du}{dv}$ *za koje je* $F_2 > 0$ *i takvi za koje je* $F_2 < 0$*, tj. površ će u toj tački biti sa razne strane tangentne ravni. Takva tačka se zove hiperbolična tačka površi. Pravci za koje je* $F_2 = 0$ *tj.* $Lx^2 + 2Mx + N = 0$ *zovu se asimptotski pravci u odredjenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ. Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi. Normalna krivina asimptotskih linija je nula. Dobijaju se kao integralne krive diferencijalne jednačine* $F_2 = 0$*. Iz svake hiperbolične tačke površi izlaze dve asimptotske linije.*

Ako je $M^2 - LN = 0$*, tada jednačina* $Lx^2 + 2Mx + N$ *ima jednu dvostruku nulu i postoji samo jedan pravac duž koje tangentna ravan dodiruje površ. Takva tačka površi zove se parabolična tačka površi.*

Ako glavna normala krive c_1 *zaklapa sa normalom površi ugao* θ *, tada je (*c_1 *leži na površi)*

$$R_1 = \pm R \cos \theta$$

gde je R_1 *poluprečnik krivine krive* c_1*, a* R *poluprečnik krivine krive* c*, koja se dobija normalnim presekom površi u tački krive* c_1 *i u pravcu iste. Oskulatorna ravan krive* c *sadrži tangentu krive* c_1 *i normalu površi. (*c *i* c_1 *imaju istu tangentu).*

Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z = 0$ *zove se linija najvećeg nagiba.*

Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.

Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

tj.

$$[\vec{r}_u' \times \vec{r}_v] \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0 .$$